



FONCTIONS NUMERIQUES

EXERCICE

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+3x+6}{x+2}$

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f 1pt
- 2) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition 1,5pt
- 3) Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$ 1,5pt
- 4) Montrer que la droite $(D): y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) et étudier la position de (D) par rapport à (C_f) 1,5pt
- 5) Donner l'autre asymptote de (C_f) ainsi que sa nature 0,5pt

SOLUTION

1) Déterminons D_f

f existe ssi $x + 2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$ donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$

2) Limites de f aux bornes de D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2+3x+6}{x+2} = -\infty \text{ Car } \begin{cases} (-2)^2 + 3(-2) + 6 = 4 \\ -2 + 2 = 0^- \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+3x+6}{x+2} = +\infty \text{ Car } \begin{cases} (-2)^2 + 3(-2) + 6 = 4 \\ -2 + 2 = 0^+ \end{cases}$$

3) Déterminons a , b et c

Méthode 1 : Identification

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2} = \frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}; \quad f(x) = \frac{x^2+3x+6}{x+2}$$

Par identification, $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 3 \\ 2b + c = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2 + b = 3 \rightarrow b = 1 \\ 2 + c = 6 \rightarrow c = 4 \end{cases}$

Méthode 2 : Division Euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x + 6 & x+2 \\ -x^2 - 2x & \\ \hline x+6 & \\ -x-2 & \\ \hline 4 & \end{array}$$





Ainsi, $a = 1 ; b = 1 ; c = 4$

4) Montrons que (D) est une asymptote oblique et position relative

$$f(x) - y = (x + 1) + \frac{4}{x+2} - (x + 1) = \frac{4}{x+2} ; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x+2} = 0 \text{ donc}$$

(D): $y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) .

- $\forall x \in]-\infty ; -2], \frac{4}{x+2} \leq 0 \rightarrow f(x) - y \leq 0 \rightarrow f(x) \leq y$ Donc (C_f) est en dessous de (D)
- $\forall x \in [-2 ; +\infty[, \frac{4}{x+2} \geq 0 \rightarrow f(x) - y \geq 0 \rightarrow f(x) \geq y$ Donc (C_f) est au-dessus de (D)

5) Seconde asymptote

On a : $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ donc $x = -2$ est une asymptote verticale à (C_f) .

VIAJEC

