

NOMBRES COMPLEXES – TRANSFORMATIONS DU PLAN

Soient $M(Z)$; $M'(Z')$ deux points du plan complexe et f la transformation tel que $f(M) = M'$.
L'écriture complexe de f est : $Z' = aZ + b$ avec a et b des nombres complexes et a non nul.

Conditions sur a	Expression complexe	Caractéristiques géométriques
$a = 1$	$Z' = Z + b$	Translation de vecteur $\vec{u}$, d'affixe b
$a = -1$	$Z' = -Z + b$	Symétrie centrale de centre Ω tel que $Z_{\Omega} = \frac{b}{2}$
$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$	$Z' = aZ + b$	Homothétie de rapport a et de centre Ω tel que $Z_{\Omega} = \frac{b}{1-a}$
$a = e^{i\theta}$	$Z' = e^{i\theta}Z + b$	Rotation d'angle θ et de centre Ω tel que $Z_{\Omega} = \frac{b}{1-e^{i\theta}}$
$a = ke^{i\theta}$ ($k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$)	$Z' = ke^{i\theta}Z + b$	Similitude directe de rapport k , d'angle θ et de centre Ω tel que $Z_{\Omega} = \frac{b}{1-ke^{i\theta}}$

APPLICATION

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f d'écriture complexe :



a) $z' = z + 3 - i$

b) $z' = -\sqrt{3} z$

c) $z' = -z + 2i$

d) $z' = (1 - i)z + 1$

e) $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z + 2i$

SOLUTION

a) $z' = z + 3 - i$

f est une **Translation** de vecteur $\vec{u}$ tel que $z_{\vec{u}} = 3 - i$

b) $z' = -\sqrt{3} z$

f est une **Homothétie** de rapport $-\sqrt{3}$ et de centre A tel que $z_A = \frac{0}{1+\sqrt{3}} = 0$.

c) $z' = -z + 2i$

f est une **symétrie centrale** de centre B tel que $z_B = \frac{2i}{2} = i$

d) $z' = (1 - i)z + 1$

$1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}$ donc $z' = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} z + 1$, Ainsi f est une **similitude directe** de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de centre C tel que

$$z_C = \frac{1}{1-(1-i)} = \frac{1}{i} = -i.$$

e) $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z + 2i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2i = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2i$

f est une **rotation** d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre D tel que

$$z_D = \frac{2i}{1-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{4i(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{4i(1-i\sqrt{3})}{4} = \sqrt{3} + i$$

