



FONCTIONS NUMERIQUES : THEOREME DE LA BIJECTION

1) CONDITIONS D'APPLICATION

Soit f une fonction définie sur un intervalle K :

- f est **continue** sur K
- f est **strictement monotone** sur K (Strictement décroissante ou strictement croissante)

2) CONSEQUENCES

- f **réalise une bijection** de K vers $f(K)$
- Si $f'(x) \neq 0$ alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(K)$ et on a :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

3) UTILISATION

- Montrer qu'une équation (par exemple $f(x) = 0$) admet une **unique solution**
- Trouver le domaine de définition ; l'**ensemble de dérivabilité** et **expression de la dérivée** de la fonction réciproque

4) APPLICATION

Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin^2 x$.

- Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}
- Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable et montrer que sa dérivée est la fonction $x \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

Solution

a) Montrons que f admet une fonction réciproque

f est **continue** et dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ comme fonction trigonométrique et on a :





$$f'(x) = 2 \cos x \sin x = \sin 2x ; f'(x) = 0 \rightarrow \sin 2x = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin 2x \geq 0$ donc **f est strictement croissante** sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f admet une fonction réciproque f^{-1} .

b) Ensemble de dérivabilité de f^{-1} et expression de sa dérivée

f^{-1} est définie sur $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f(0); f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [0; 1]$. $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$;
 $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ Donc f^{-1} est dérivable sur $]0; 1[$ et on a :

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ Or } f'(x) = 2 \sin x \cos x = 2 \sqrt{\sin^2 x} \sqrt{\cos^2 x} \text{ car } \sin x \text{ et } \cos x \text{ sont positifs sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$f'(x) = 2 \sqrt{\sin^2 x} \sqrt{1 - \sin^2 x} = 2 \sqrt{f(x)} \sqrt{1 - f(x)} \text{ Donc}$$

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{2 \sqrt{f(f^{-1}(x))} \sqrt{1 - f(f^{-1}(x))}} \text{ or } f(f^{-1}(x)) = x, \text{ ainsi } (f^{-1}(x))' = \frac{1}{2 \sqrt{x} \sqrt{1-x}}.$$

VIAJEC

