



PIVOT DE GAUSS

EXPLICATION DU PRINCIPE DE RESOLUTION PAR PIVOT DE GAUSS

Pour résoudre un système dans $\mathbb{R}^3$ par **pivot de Gauss**, il faut :

- **Annoter** les différentes équations du système **Ex** : L_1 ; L_2 ; L_3
- Sélectionner **l'équation la plus simple** (avec le moins de gros nombres possible) et la définir comme **ligne pivot**
- **Eliminer** un des trois inconnus (par **combinaison**) pour créer un système de **deux équations à deux inconnus**
- Résoudre le système de deux équations à deux inconnues en utilisant la **combinaison** ou la **substitution**
- Déterminer le troisième et le dernier inconnu grâce à la **ligne pivot**
- Conclure

APPLICATION

1) A l'aide de pivot de GAUSS, résoudre le système $\begin{cases} x + y + z = 120 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + 2y - z = 75 \end{cases}$ 1,5pt

2) en déduire la solution du système : $\begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z-3} = 120 \\ \frac{1}{x-1} - \frac{2}{y+1} + \frac{1}{z-3} = 0 \\ \frac{2}{x-1} + \frac{2}{y+1} - \frac{1}{z-3} = 75 \end{cases}$ 1,5pt

3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} x + 2y + z = 600 \\ x + y + 2z = 625 \\ x + 2y + 2z = 775 \end{cases}$ 1pt

b) Trois amis Alain, Annie et Yannick se rendent dans un restaurant. Alain commande un pain, deux œufs et une sardine et paye 600F. Annie commande un pain, un œuf et deux sardines et paye 625F. Yannick commande un pain, deux œufs et deux sardines et paye 775F. on désigne par x le prix d'un pain, par y le prix d'un œuf et z le prix d'une sardine.

a) Montrer que x, y et z vérifient le système a)

b) En déduire le prix d'un pain, d'un œuf et d'une boîte de sardine.

1pt
0,75pt

SOLUTION





1) Résolvons le système
$$\begin{cases} x + y + z = 120 \quad (L_1) \\ x - 2y + z = 0 \quad (L_2) \\ 2x + 2y - z = 75 \quad (L_3) \end{cases}$$

Soit (L_2) la ligne pivot

❖ **Éliminons z**

$$(L_1) - (L_2) : \begin{cases} x + y + z = 120 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \rightarrow 3y = 120 \rightarrow y = \frac{120}{3} = 40 ; \quad y = 40 \quad (L_4)$$

$$(L_3) + (L_2) : \begin{cases} 2x + 2y - z = 75 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \rightarrow 3x = 75 \rightarrow x = \frac{75}{3} = 25 ; \quad x = 25 \quad (L_5)$$

❖ **Trouvons z**

$$(L_4) \text{ et } (L_5) \text{ dans } (L_2) : x - 2y + z = 0 \leftrightarrow 25 - 2 \times 40 + z = 0 \rightarrow z = -25 + 80 = 55$$

$z = 55$ Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \{(25; 40; 55)\}$

2) Déduisons les solutions du système
$$\begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z-3} = 120 \\ \frac{1}{x-1} - \frac{2}{y+1} + \frac{1}{z-3} = 0 \\ \frac{2}{x-1} + \frac{2}{y+1} - \frac{1}{z-3} = 75 \end{cases}$$

Conditions d'existence :

- $\frac{1}{x-1}$ existe ssi $x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$
- $\frac{1}{y+1}$ existe ssi $y + 1 \neq 0 \rightarrow y \neq -1$
- $\frac{1}{z-3}$ existe ssi $z - 3 \neq 0 \rightarrow z \neq 3$

On remarque que :
$$\begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z-3} = 120 \\ \frac{1}{x-1} - \frac{2}{y+1} + \frac{1}{z-3} = 0 \\ \frac{2}{x-1} + \frac{2}{y+1} - \frac{1}{z-3} = 75 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{x-1}\right) + \left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{1}{z-3}\right) = 120 \\ \left(\frac{1}{x-1}\right) - 2\left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{1}{z-3}\right) = 0 \\ 2\left(\frac{1}{x-1}\right) + 2\left(\frac{1}{y+1}\right) - \left(\frac{1}{z-3}\right) = 75 \end{cases}$$

Posons $X = \frac{1}{x-1}$; $Y = \frac{1}{y+1}$; $Z = \frac{1}{z-3}$ Le système devient :
$$\begin{cases} X + Y + Z = 120 \\ X - 2Y + Z = 0 \\ 2X + 2Y - Z = 75 \end{cases}$$
 'après la question 1, on a : $X = 25$; $Y = 40$; $Z = 55$





- $X = 25 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = 25 \rightarrow 25(x-1) = 1 \rightarrow 25x - 25 = 1 \rightarrow 25x = 26 \rightarrow x = \frac{26}{25}$
- $Y = 40 \Leftrightarrow \frac{1}{y+1} = 40 \rightarrow 40(y+1) = 1 \rightarrow 40y + 40 = 1 \rightarrow 40y = -39 \rightarrow y = -\frac{39}{40}$
- $Z = 55 \Leftrightarrow \frac{1}{z-3} = 55 \rightarrow 55(z-3) = 1 \rightarrow 55z - 165 = 1 \rightarrow 55z = 166 \rightarrow z = \frac{166}{55}$

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{26}{25} ; -\frac{39}{40} ; \frac{166}{55} \right) \right\}$

3.a) Résolvons le système
$$\begin{cases} x + 2y + z = 600 & (L_1) \\ x + y + 2z = 625 & (L_2) \\ x + 2y + 2z = 775 & (L_3) \end{cases}$$

Soit (L_1) la ligne pivot

❖ **Éliminons z**

$$-2(L_1) + (L_2) : \begin{cases} -2x - 4y - 2z = -1200 \\ x + y + 2z = 625 \end{cases} \rightarrow -x - 3y = -575 \quad (L_4)$$

$$-2(L_1) + (L_3) : \begin{cases} -2x - 4y - 2z = -1200 \\ x + 2y + 2z = 775 \end{cases} \rightarrow -x - 2y = -425 \quad (L_5)$$

On a le système :
$$\begin{cases} -x - 3y = -575 & (L_4) \\ -x - 2y = -425 & (L_5) \end{cases}$$

❖ **Éliminons x**

$$-(L_4) + (L_5) : \begin{cases} x + 3y = 575 \\ -x - 2y = -425 \end{cases} \rightarrow y = 150$$

$$(L_5) : -x - 2y = -425 \Leftrightarrow x + 2(150) = 425 \rightarrow x = 425 - 300 = 125 ; x = 125$$

$$(L_1) : 125 + 2(150) + z = 600 \rightarrow z = 600 - 125 - 300 = 175 ; z = 175$$

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \{(125 ; 150 ; 175)\}$

3.bi) Montrons que x ; y et z vérifie le système a)

On a : **Alain** {1 pain + 2 œufs + 1 sardine = 600F} $\Leftrightarrow x + 2y + z = 600$

Annie {1 pain + 1 œufs + 2 sardines = 625F} $\Leftrightarrow x + y + 2z = 625$





Vision d'Impact et d'Avenir pour
la Jeunesse Camerounaise



Yannick {1 pain + 2 œufs + 2 sardines = 775F} $\leftrightarrow x + 2y + 2z = 775$ ainsi on a le

système :
$$\begin{cases} x + 2y + z = 600 \\ x + y + 2z = 625 \\ x + 2y + 2z = 775 \end{cases}$$

3.bii) Déduisons le prix d'un pain, d'un œuf et d'une boîte de sardine

De ce qui précède, on a :
$$\begin{cases} x + 2y + z = 600 (L_1) \\ x + y + 2z = 625 (L_2) \\ x + 2y + 2z = 775 (L_3) \end{cases}$$
 d'après la question 3.a,

$x = 125 ; y = 150 ; z = 175$. Ainsi, **un pain coûte 125F ; un œuf 150F et une boîte de sardine 175F.**

VIAJEC

Association VIAJEC – Vision d'Impact et d'Avenir pour la Jeunesse Camerounaise
| Siège : Face Maison Damas, Yaoundé | BP 11597 Yaoundé | Contact : +237 676 091 236

Nos partenaires :



FAST AND
SURE TRAVEL SARL
+237 655834207 / 681488180



SAPIENTIA ACADEMY
+237 694256260