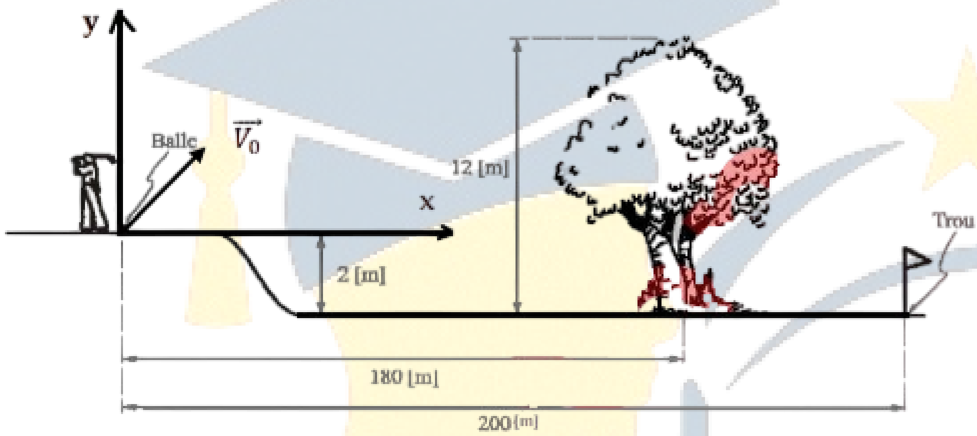
CINEMATIQUE – MOUVEMENT D'UN PROJECTILE

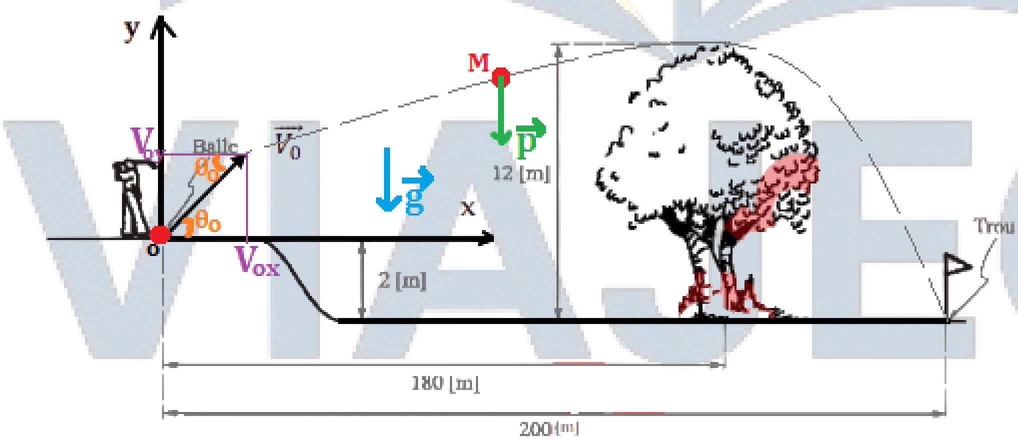
EXERCICE

La figure ci-dessous schématise un parcours de golf. Le joueur désire envoyer la balle dans le trou situé en contrebas (drapeau). Le green est néanmoins bordé par un rideau d'arbres d'une hauteur de 12m.



Déterminez l'amplitude V_0 et l'angle θ_0 de la vitesse initiale que le joueur doit communiquer à la balle s'il désire que celle-ci frôle la cime des arbres et tombe directement dans le trou (sans rouler)

SOLUTION



Il est question ici pour nous de terminer la vitesse V_o et l'angle θ_o , pour cela, nous allons :

- **Déterminer les équations horaires du mouvement de la balle**

- **Déterminer l'équation de la trajectoire**
- **Utiliser les données de l'énoncé pour calculer V_o et θ_o**

1) Equations horaires du mouvement

Dans le repère $(o\,;ox\,;oy)$, on a : $\vec{V_o}\left|\begin{array}{l}V_{ox}=V_o\cos\theta_o\\V_{oy}=V_o\sin\theta_o\end{array}\right.$

D'après le TCI : $\vec{P}=m\vec{a}\rightarrow m\vec{g}=m\vec{a}\rightarrow\boxed{\vec{g}=\vec{a}}$ or $\vec{g}\left|\begin{array}{l}0\\-g\end{array}\right.$ donc $\vec{a}(t)\left|\begin{array}{l}0\\-g\end{array}\right.$; $\vec{V}(t)\left|\begin{array}{l}V_o\cos\theta_o\\-gt+V_o\sin\theta_o\end{array}\right.$;

$$\overrightarrow{OM}(t)\left|\begin{array}{l}x(t)=(V_o\cos\theta_o)t\\y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+(V_o\sin\theta_o)t\end{array}\right.$$

2) Equation de la trajection

On a : $x(t)=(V_o\cos\theta_o)t\rightarrow t=\frac{x}{V_o\cos\theta_o}$ donc $y(x)=-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_o\cos\theta_o}\right)^2+(V_o\sin\theta_o)\left(\frac{x}{V_o\cos\theta_o}\right)$

$$y(x)=-\frac{g}{2{V_o}^2(\cos\theta_0)^2}x^2+x\tan\theta_o$$

3) Calculons V_o et θ_o

On sait que :

- La balle frôle la cime de l'arbre donc $y(180\,m)=12\,m-2\,m$
- La balle tombe directement dans le trou donc $y(200\,m)=-2m$

D'où $\begin{cases}-\frac{g}{2{V_o}^2(\cos\theta_0)^2}180^2+180\tan\theta_o=10\ \ (1)\\-\frac{g}{2{V_o}^2(\cos\theta_0)^2}200^2+200\tan\theta_o=-2\ (2)\end{cases}$; $(1):-\frac{g}{2{V_o}^2(\cos\theta_0)^2}=\frac{-180\tan\theta_o+10}{180^2}$

(1)dans(2) : $\frac{-180\tan\theta_o+10}{180^2}\times200^2+200\tan\theta_o=-2\rightarrow\left(-\frac{200^2}{180}+200\right)\tan\theta_o=-2-\frac{10\times200^2}{180^2}$

$$\tan\theta_o=\frac{-2-\frac{10\times200^2}{180^2}}{-\frac{200^2}{180}+200}\rightarrow\theta_o=tan^{-1}\left(\frac{-2-\frac{10\times200^2}{180^2}}{-\frac{200^2}{180}+200}\right)\rightarrow\theta_o=32,84°$$

$$(1):-\frac{g}{2{V_o}^2(\cos\theta_0)^2}=\frac{-180\tan\theta_o+10}{180^2}\rightarrow\boxed{V_o=\sqrt{\frac{g\times180^2}{2(\cos\theta_0)^2(180\tan\theta_o-10)}}}$$

AN : $V_o=\sqrt{\frac{9{,}81\times180^2}{2(\cos32{,}84°)^2(180\tan32{,}84°-10)}}=46$ $V_o=46\,m/s$.