FICHE DE Tle D , Ti – Congé de Noël 2025

Nombres Complexes

Exercice 1

Soit P un polynôme définit par $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + 8$ tel que $P(1+i) = 0$ et $P(1) = 6$.

1- a) Montrer que a, b *et* c vérifient le système (S): $\begin{cases} a + b + c = -2 \\ 2a + 2b - c = 8 \\ 2a + c = 0 \end{cases}$

b) Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, le système (S) et en déduire l'expression de $P(z)$.

2- On considère l'équation (E): $2z^3 - 4z + 8 = 0$

a) Montrer que si (E) admet une solution complexe z_0, alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E)

b) En déduire que l'équation (E) admet au moins une solution réelle.

(On ne demande pas de la déterminer.)

c) Vérifier que 1+i est une solution de (E)

d) Résoudre alors l'équation (E)

e) Déterminer le module et un argument de chaque solution de (E)

Exercice 2

On considère le nombre complexe : $a = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1. Calculer a^2 puis déterminer son module et son argument.
2. En déduire le module de a et vérifier qu'une mesure de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$ représenter sur le même graphique les nombres : $a, -a, a^2$.
3. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $cos\frac{7\pi}{12}$ et $sin\frac{7\pi}{12}$ puis le $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$
4. Représenter sur le même graphique précédent l'ensemble des points M d'affixe z tels que a^2z soit réel.

Exercice 3

1) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe d'écriture complexe.

a) $z' = iz + 1$; b) $z' = (1-i)z + 1$; c) $z' = z + 1 + i$

2) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centreΩ, de rapport K et d'angleα :

a) $\Omega(1+i)$: $K = 2$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$; b) $\Omega(i)$: $K = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$(unité graphique 1cm).

On considère l'équation $(\mathbf{E}): z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$.

1. **a.** Montrer que $-i$ est solution de **(E)**.
   b. Déterminer les nombres réels *a* et *b* tels que :
   $$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(z^2+az+b).$$
   c. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
2. **A, B** et **C** sont trois points d'affixes respectives $4+i, 4-i$ **et** $-i$.
   a. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
   b. On considèrele point **Ω** d'affixe 2 et D l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de D.
3. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer (C).
4. On considère la transformation ϕ quià tout point *M* d'affixe $z \neq 2$, associe le point *M* ′ d'affixe z'tel que $z'=\frac{iz+10-2i}{z-2}$.
   a. Déterminer les affixes des points A′, B′ et C′ images respectifs des points A, B et C.
   b. Vérifier que A′, B′ et C′appartiennent à un cercle (C′′) de centre P d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer (C ′).
   c. Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|z'-i|$ en fonction de *z*.
   d. Soit *M* un point d'affixe $z$appartenant au cercle (C). Démontrer que $|z'-i|=2\sqrt{5}$.
   e. En déduire l'image du cercle (C) par ϕ.

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$. On donne $z_A=1$, $z_B=-3i$, $z_C=1+i$ et $z_D=2-3i$.

s est la similitude directe plane qui transforme A en B et C en D.

1) Donner l'écriture complexe de s.

2) On considère l'application f qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' tel que $z'=u^2z-i$ où u est un nombre complexe.

a) Déterminer les valeurs de u pour les quelles f est une translation.

b) Déterminer les valeurs de u pour les quelles f est une homothétie de rapport 2.

c) Déterminer les valeurs de u pour les quelles f est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

d) Déterminer les valeurs de u pour les quelles f est une similitude de rapport 4 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\,)$.

1) Soit h la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que $\boldsymbol{z_1=2z+i}$. Donner la nature et les éléments caractéristique de h.

2) Soit r la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M_2 d'affixe z_2 tel que $z_2 = (-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})z$. Donner la nature et les éléments caractéristique de r.

3) Soit la transformation $s = hor$ du plan dans lui-même Donner l'expression complexe, la nature et les éléments caractéristique de s.

4) Soit la similitude directe plane s' qui au point M(z) associe le point M'(z') tel que :
$z' = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}z - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Déterminer l'affixe de l'image O' du point O par s'.

b) Déterminer l'expression analytique de s'.

c) En déduire :

i) l'équation cartésienne de l'image (D') de la droite (D) : $x + y\sqrt{3} + 2 = 0$ par s'.

ii) l'équation cartésienne de l'image (C') du cercle (C) de centre O et de rayon 3cm par s'.

Exercice 7

*Monsieur **AWONO** vient de s'acquérir un terrain du côté de **FOTO** dans la ville de **DSCHANG**. Ce terrain a la forme d'un triangle dont un des sommets a pour affixe $2+3\,i$ et les deux autres les sommets sont solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation $z^2 + (2+3\,i)\,z - 2(1-2\,i) = 0$. L'unité de longueur étant de 10m. Il souhaite protéger ce terrain en l'entourant avec deux rangées de fil barbelé dont le mètre coûte 1200 FCFA. Quel est le montant nécessaire pour l'achat du fil barbelé ?*

Exercice 8

*Monsieur **BOND** dispose de deux terrains. Le terrain 1 situé à **ODZA** est un domaine EFGHI où les points E, F, G, H et I ont pour affixes respectives z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 avec $z_0 = 2$ et pour tout* *entier n, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. Il souhaite protéger ce terrain avec 3 rangées de fil barbelé dont le mètre coûte 5 000 FCFA.*

*Le terrain 2 situé à **OLEMBE** dont la forme est délimitée par l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z-7+4i}{z+1-2i}$ soit imaginaire pur. Il souhaite revendre ce terrain à une entreprise à raison de 15 000 FCFA le m^2.*

1. *Quel montant est nécessaire pour l'achat du fil barbelé ?*
2. *Quel sera le montant obtenu après la vente des terrains ?*

NB : Dans tout l'exercice, l'unité sur les axes est de 10 m. ***Prendre $\pi = 3,14$***

Fonctions numériques

Exercice 1

1) On considère la fonction f définie de IR vers IR par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & si\ x < 2 \\ 3x - 2a & si\ x > 2 \\ b & si\ x = 2 \end{cases}$

Déterminer les nombres a et b pour que la fonction f soit continue en $x_0 = 2$

2) On considère la fonction g définie de IR vers IR par : $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 7x + 2}$

a) Donner l'ensemble de définition de la fonction g

b) Déterminer s'il existe le prolongement par continuité de cette fonction en $x_0 = 2$

3) Etudier les branches infinies à l'infini de la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{5x^3 - 2x + 12}{x}$$

4– Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1}-x$; $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 7x}{3x}$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{4x^2}$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$; $\lim\limits_{x\to9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (3\cos x+5x)$

Exercice 2

On considère la fonction numérique d'une variable réelle f dont le tableau de variation est donné ci-dessous

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$\frac{27}{4}$	$\searrow$	0

1) Déterminer le domaine de définition de f et préciser les limites à ses bornes puis conclure.
2) Justifier que f réalise une bijection de $]-\infty\,;\,-1]$ vers un intervalle que l'on précisera.
3) Déterminer le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x)=0$ en justifiant votre démarche.
4) Déterminer le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x)=1$ en justifiant votre démarche.

Exercice 3

1-a) Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty\,;\,1]$ par la fonction g définie par : $g(x)=x^3+2x+5$

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α tel que $-\frac{3}{2}\leq\alpha\leq-1$.

2) Soit f une fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$
Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K que l'on précisera, puis déterminer sa réciproque f^{-1}.

Exercice 4

On considère la fonction h définie par : $h(x)=x+\sqrt{x}$.

1) Montrer que h est dérivable sur l'intervalle $[1\,;4]$ et pour tout $t\in[1\,;4]$, $\frac{5}{4}\leq h'(t)\leq\frac{3}{2}$.

2) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}\leq h(x)\leq\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$.

Exercice 5

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire.

On considère la fonction g définie par $g(x)=x^3-3x-4$

1 – Etudier les variations de g

2 – Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à [2 ;3] tel que g(α) = 0

3 – Déterminer la valeur de α à 10^{-2} près en utilisant la méthode par dichotomie

4 – Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

PARTIE B : Etude de la fonction f

1 – Déterminer le domaine de définition de la fonction f, puis calculer les limites de f aux bornes de ce domaine .

2 – Justifier que f est dérivable sur Df et montrer que pour tout $x \in Df$, $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

3 – Déduire le sens des variations de f sur Df

4 – Dresser le tableau des variations de f

5 – Etudier les branches infinies de la courbe (Cf)

PARTIE C

Soit h la restriction de f à l'intervalle I = $]-\infty\,;-1[$

1 – Montrer que h est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

2 – Résoudre dans I, l'équation $h(x)=0$

3 – Dresser le tableau des variations de h^{-1}

4 – Calculer $(h^{-1})'(0)$

Exercice 6

PARTIE A Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par: $f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) Montrer que la dérivée de f garde un signe constant sur $]1,+\infty[$.

2) Etudier les variations de la fonction f

3) En déduire que $(E): f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]1,2[$.

PARTIE B Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

1) Montrer que l'équation (E)est équivalent à l'équation$(E'): g(x)=x$.

2) a) Montrer que si $x\in[1\,,2]$, alors $g(x)\in[1\,,2]$.

b) Justifier que g est dérivable sur$]0,+\infty[$; calculer la dérivée g' de g

c) Montrer que pour tout $x\in[1\,,2]$, $|g'(x)|\leq\frac{1}{2}$.

d) En déduire que pour tout $x\in[1\,,2]$, $|g(x)-\alpha|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$.

PARTIE C On considère la suite (u_n)définit par : $\begin{cases}u_0=2\\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=g(u_n)\end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est élément de $[1\,,2]$.

b) Etablir pour tout $n\in\mathbb{N}$ les inégalités$|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|et|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

d) Déterminer le plus entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

e) Déterminer U_p

Suites Numériques

Exercice 1

(w_n) est une suite géométrique à termes positifs telle que $\begin{cases} w_1 \times w_2 \times w_3 = 64 \\ w_2 \times w_0 = 64 \end{cases}$

Quelle est la valeur de w_0 ? Quelle est la raison q ? Exprimez w_n en fonction de n

Exercice 2

On définit la suite des nombres complexes (z_n) par $\begin{cases} z_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ z_{n+1} = \left(1 - \sqrt{3}i\right) z_n \end{cases}$

1. Ecrire z_0 et z_1 sous la forme trigonométrique.

2. On pose pour tout entier naturel n, $r_n = |z_n|$ et $\theta_n = arg(z_n)$

a. Montrer que (r_n) est une suite géométrique.

b. Montrer que (θ_n) est une suite arithmétique.

c. En déduire l'écriture de z_n en fonction de n.

Exercice 3

On considère la suite numérique définie par $0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel non nul n,

$u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$

1. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. Soit $f(x) = x - x^2$

a. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

b. Déduire en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

c. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

3. On pose pour tout entier naturel n non nul, $v_n = n \times u_n$

a. Vérifier que pour tout entier n, $f\left(\frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+2}$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

b. Déduire que (v_n) est une suite majorée.

Montrer que $v_{n+1} - v_n = u_n[1-(n+1)u_n]$ puis déduire le sens de variation de la suite (v_n).

Exercice 4

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 1$ *et pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2}$

1. *Montrer par récurrence que pour tout entier naturel* n, $0 < u_n < 2$
2. a. *Montrer que pour tout entier* n, $u_{n+1} - u_n = \frac{(1+u_n)(2-u_n)}{2+u_n}$

   b. *En déduire la monotonie de la suite* (u_n) *puis que* $1 \leq u_n < 2$

   c. *Montrer que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*
3. *On pose pour tout entier naturel* n, $v_n = \frac{u_n+1}{u_n-2}$

a. *Montrer que la suite* (v_n) *est une suite géométrique.*

b. *Donner l'expression de* u_n *en fonction de* n.

Exercice 5

Soit (u_n) *la suite numérique définie par* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n^3 + 1)$*.On définit sur* $I = [0, 1]$ *la fonction* f *par* $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1)$

1. *Etudier les variations de* f *puis montrer que* $f(I) \subset I$
2. *Montrer que pour tout entier naturel* n, $u_n \in I$
3. *Soit* g *la fonction définit sur* I *par* $g(x) = f(x) - x$*. Démontrer que l'équation* $g(x) = 0$ *admet une unique solution* α *sur* I.
4. *Montrer que pour tout* $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$ *puis que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ *et déduire que* (u_n) *converge.*

Statistiques

Exercice 1

Un hôtel de ville africaine établit un lien entre le taux d'occupation des chambres (exprimé en %) et le montant des frais de publicités (exprimé en centaine de milliers de FCFA). Les résultats de cette étude ont été consignés dans le tableau suivant :

Frais de publicité	30	27	32	25	35	22	24	35
Taux de participation	52	45	67	55	76	48	32	72

1. *Donner une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer.*
2. *Estimer le taux d'occupation de cet hôtel si les frais de publicité étaient de 4000 000 FCFA*

Exercice 2

Monsieur ***AWONO*** *est enseignant vacataire dans un établissement privé. Le tableau suivant donne l'évolution du montant du taux horaire des enseignants dans cet établissement.*

Année	2015-2016	2016-2017	2017-2018	2018-2019	2019-2020
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Taux horaire y_i	2000	2200	2500	2700	2950

Si cette tendance se poursuit, quel serait le taux horaire de M. ***AWONO*** *cette année scolaire dans cet établissement ?*

Exercice 3

Le tableau suivant donne la superficie (en m²) et le prix (en milliers de francs CFA) de 10 appartements vendus récemment dans le centre d'une petite ville.

Superficie x_i	42	46	48	52	55	75	80	90	100	120
Prix y_i	330	370	400	430	450	660	680	780	850	1050

1. *Représenter le nuage de points de cette série dans le plan rapporté à un repère orthogonal. Prendre 1 cm pour 10 m² en abscisse et 1 cm pour 100 000 FCFA en ordonnée.*
2. *Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de point.*
3. *Montrer qu'une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrées est $y = 9{,}1086x - 44{,}89$.*
4. *Dans cette question, on utilisera l'équation obtenue à la question 3) pour faire des estimations.*
   (a) *Estimer le prix d'un appartement de 150 m²*
   (b) *Estimer (au mètre carré près), la surface d'un appartement coûtant 1 600 000 FCFA.*

Primitives et intégrales

Exercice 1

Determiner les primituves des fonctions suivantes :

A)

$(a)\ x(x^3+1);\quad (b)\ \dfrac{1}{x-3};\quad (c)\ \sin(2x-\dfrac{\pi}{6});\quad (d)\ \dfrac{1}{\cos^2(x+\frac{\pi}{2})}$

$(e)\ \sin^2(x);\quad (f)\ \cos^4(x);\quad (g)\ \dfrac{1}{(2x+5)^3};\quad (h)\ \tan^2(x)$

B)

$(a)\dfrac{2x+3}{x^2-4}\qquad (b)\dfrac{3x+7}{x^2-3x+2}\qquad (c)\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

$(d)\dfrac{x^2-1}{x^3+4x^2+5x}\qquad (e)\dfrac{x^3+2}{x^2+3x+2}\qquad (f)\dfrac{2x-5}{x(x-1)(x+3)}$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x^3-x+4\,dx\ ;\ \int_1^2 (3x-5)^7\,dx\ ;\ \int_1^3 \frac{1}{y+1}\,dy\ ;\ \int_2^3 \frac{1}{(x-4)^3}\,dx$$

$$I=\int_0^1 (2x-1)^5(x+3)dx \quad , \quad J=\int_2^3 \frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2}dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x-\frac{\pi}{3})\,dx \text{ et } \int_0^1 e^{3x+1}\,dx.$$