FICHE DE TRAVAUX MATHS TC – Congé de Noël 2025

Arithmétique

Exercice 1

Soit p et q deux entiers relatifs premiers entre eux, n un entier naturel non nul. On considère le polynôme R tel que $R(x) = 6x^3 + 9x^2 + 5x + 1$.

1- Montrer que p et q^n sont premiers entre eux.

2- On suppose que la fraction $\frac{p}{q}$ est une racine de R.

a) Montrer que $p \in \{-1; 1\}$ et que q divise 6.

b) En déduire une racine de R, puis factoriser $R(x)$.

3- Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $R(x) \equiv 0[5]$.

4- Démontrer que pour tout entier relatif x, la fraction $\frac{2x+1}{3x^2+3x+1}$ est irréductible.

Exercice 2

A 1. Soit n et m deux entiers naturels non **nuls**. Et **Z** un nombre complexe vérifiant $Z^n = 1$ et $Z^m = 1$. Montrer que $Z^d = 1$ ou $d = PGCD(n;m)$.

2. Soit P un entier naturel tel que : $\begin{cases} 17085 \equiv 12[P] \\ 5399 \equiv 2[P] \end{cases}$. *Déterminer P.*

B. On considère l'équation (E) : $x^2 - 5y^2 = 1$ ou les inconnues x et y sont des entiers strictement positifs.

1. Dans cette question, on suppose que $(x_0;\, y_0)$ est une solution de (E).

a) Démontrer que x_0 et y_0 sont premiers entre-eux.

b) Prouver que x_0 et y_0 n'ont pas la même parité.

C) Démontrer qu'il existe un entier k tel que $x_0 = 5k + 1$ ou $x_0 = 5k - 1$.

2. Calculer $1 + 5y^2$ $pour$ $1 \leq y \leq 4$.En déduire un couple$(x_0;\, y_0)$ solution de (E).

3.a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n il existe deux entiers naturels a_n et b_n tels que $(9 + 4\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$.

b) Donner a_1 et b_1.Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c) A l'aide d'une récurrence sur n ;$n \geq 1$, Montrer que les couples$(a_n;\, b_n)$ sont solutions de (E).(Il s'en suit donc que les solutions a_n et b_n sont premiers entre-eux)

d) En calculant $\frac{1}{9+4\sqrt{5}}$ et $\frac{1}{a_n+b_n\sqrt{5}}$; *montrer que* $(9 - 4\sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5}$. En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 3

Le général d'armé Salifou a entre 300 et 400 soldats qu'il désire amener en mission pour sécuriser la frontière contre d'éventuelles troubles. Il les répartit par groupe de 17 soldats, il lui en reste 9 soldats ; mais quand il fait des groupes de 5 soldats, il lui en reste 3 soldats.

Pour cette mission, chaque soldat reçoit une prime journalière de 1500 francs s'il passe la nuit au campement ou alors 2000 francs s'il passe la nuit en brousse. L'un des soldats Hamir, se rappelle avoir reçu une prime de 31000 francs et qu'il a fait entre 10 et 16 jours de mission.

Pendant la mission, pour conserver la confidentialité des messages échangés par les troupes, les messages sont alors codés. On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier naturel $\boldsymbol{x}$: par exemple à A on associe 0, à B on associe 1, à C on associe 2 et ainsi de suite jusqu'à Z qui est associé à 25. Ensuite à x on associe l'entier y qui est le reste de la division euclidienne de $(\overline{11^2})^x$ par 26. Enfin à y on associe la lettre correspondante. Le Général a envoyé le mot STYLO.

Tâches

1- Quel est le mot reçu du général par les troupes ?
2- Combien de soldats dispose le général Salifou ?
3- Combien de jours de mission le soldat Hamir a-t-il passé en brousse ?

Nombres Complexes

Exercice 1

1- Soit z_1 , z_2 et z_2 les sommets d'un triangle équilatéral.
Démontrer que $z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$.
2- Déterminer le module et un argument du nombre complexe.
$Z = \frac{|-1+\cos\theta|-isin\,\theta}{1-icos\,\theta+|\cos\theta|}$; $\theta \,\epsilon \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.
3- Déterminer le lieu géométrique des points $M(z)$ tel que :
a) $\frac{z-1}{z^2}\,\epsilon\, IR$ $b)$ $|\overline{z} - 2 + i| = 4$ $c)$ $\arg(z^2 - 4) \equiv \arg(z+2)\,[2\pi]$ $d)$ $\left|\frac{z-4-2i}{z+2+i}\right| = \frac{1}{3}$
$d)$ $\frac{3}{z+3}$ $est\ un\ imaginaire\ pur.$

Exercice 2

ABC est un triangle tel que $AB = AC = a$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{2}$, a est un nombre réel strictement positif. D est le symétrique de A par rapport à B, O est le milieu de [CD] et (C) est le cercle de diamètre [CD]. On désigne par f la similitude directe qui transforme D en B et B en C.

1- a) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
   b) Déterminer le rapport k et l'angle α de f.
   c) Ω est le centre de f. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega C}}\right) = \frac{\pi}{2}$ (1) et que $\Omega C = 2\Omega D$ (2)

2- a) A l'aide de (1), démontrer que $\Omega \in (C)$.
   b) A l'aide de (2), démontrer que $\Omega D = a$ et en déduire que $\Omega B = BC$.

3- a) Démontrer que (OB) est la médiatrice de $[\Omega C]$.
   b) Quelle est la nature de $CAD\Omega$?
   c) Placer Ω.

4- On pose $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AC}$.
   a) Démontrer que $(A, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un repère orthonormé.
   b) Déterminer les affixes des points B, C et D dans ce repère.
   c) Donner l'écriture complexe de f.
   d) En déduire l'affixe du point Ω.

Exercice 3

Pour la construction de son nouveau siège, l'INS (Institut National de Statistiques) a acheté un terrain de forme rectangulaire dont les coordonnées géodésiques des sommets sont les points images des solutions de l'équation $[z^2 + (-20 + 40i)z - 300 - 1200i][z^2 + (40 - 20i)z + 300 - 1200i] = 0$. L'unité de longueur est le mètre. L'INS engage un ingénieur en bâtiment pour clôturer la parcelle, celui-ci propose un devis 17 225F par mètre de mur tout en prévoyant une ouverture de 5m pour un portail estimé à 1 002 500F.

La cellule de crise du suivi de la pandémie du COVID19 de l'INS a publié les données du tableau ci-dessous, où x_i est le nombre de cas confirmés et y_i le nombre de guérisons, pour les mois de février à juillet 2020 et en rappelant que le nombre de guérisons dans cette ville en octobre 2020 était de 27.

Mois	*Février*	*Mars*	*Avril*	*Mai*	*Juin*	*Juillet*
x_i	450	480	495	510	525	540
y_i	26	27	29	31	32	35

Paul, élève d'une classe de Tle D voudrait par la méthode des moindres carrés estimer le nombre de guérisons durant ce mois d'octobre 2020.

Un problème ne surgissant jamais seul, l'agence Spatial américaine NASA localise une comète se dirigeant suivant la courbe de la fonction $f{:}\mapsto 3+\sqrt{x}$ vers la planète terre et, programme alors le lancement d'un missile longue portée suivant la direction de la courbe de la fonction $g{:}\,x\mapsto 2x^2$.

Tâches

1- Aider Paul à donner cette estimation du mois d'octobre.
2- Déterminer le montant total du devis présenté par l'ingénieur.
3- Est-il possible que le missile intercepte la comète ?

Fonctions numériques

Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $I=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=1+cosx$.

1- Etudier les variations de g sur I et dresser son tableau de variation.
2- Justifier que g réalise une bijection de I vers $]1;2[$.
3- Justifier que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable sur $]1;2[$.
4- Déterminer $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ et $(g^{-1})'\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
5- a) Montrer que $g'(x)=-\sqrt{2g(x)-(g(x))^2}$.
b) En déduire que pour tout $x\in\,]1;2[$, $(g^{-1})'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Exercice 2

On considère la fonction $f:[0;\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}$ qui à $x\longmapsto\frac{1}{\cos x}$.
1) Démontrer que f réalise une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}[$ vers un intervalle à préciser.
2) Résoudre dans $[0;\frac{\pi}{2}[$ l'équation $f(x)=\sqrt{2}$.
3) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(x)$

4) Donner une équation de la tangente au point d'abscisse $\sqrt{2}$

5) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une unique solution $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$.

6) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2}près.

7)Montrer que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$; $\left|\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\alpha}\right| \leq \sqrt{2}|x - \alpha|$.

Exercice 3

Partie A:

Soit u l'application de $[\pi/2;\ 3\pi/4]$ vers $[1/2\ ; 1]$ définie par: $u(x) = sin^2(x)$.
On admet que u est bijective, on note u^{-1}sa bijection réciproque.
Déterminer l'ensemble D sur lequel u^{-1}est dérivable et déterminer pour tout x de D,$(u^{-1})'(x)$.

Partie B:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$-{−1;1} par: $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$ et (Cf)sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère ortho normal$(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité graphique: 2cm).

I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:$g(x) = x^3 - 3x + 4$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution a dans $\mathbb{R}$, montrer que $2 < a < 3$ puis déterminer une valeur approchée de a à 10^{-1} près par défaut.
3. Etudier pour tout x de $\mathbb{R}$, le signe de $g(x)$.

II.1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes du Df ensemble de définition.

2) Montrer que, pour tour de $\mathbb{R}$-{−1;1}, $f(x) = x + 1 + \frac{x+1}{x^2-1}$. En déduire le tableau des variations

3)a) Montrer que, pour tour x de $\mathbb{R}$-{−1;1},$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

b) En déduire que la courbe (Cf) admet une asymptote oblique (D) en −∞ et en +∞.

c) Etudier la position de (Cf)par rapport à (D).

Espace Vectoriel

Exercice 1

On considère les ensembles suivants $F: \{(x, y, z, t) \in E; x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(2a, -a, 0, a); a \in \mathbb{R}\}$. E étant un espace vectoriel réel de dimension 4.

1- Montrer que F est un sous espace vectoriel.

2- Démontrer que $F + G$ est une somme directe.

3- Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer le réel a tel que le vecteur $(x - 2a; y + a; z; t - a) \in F$.

4- En déduire que F et G sont deux sous espace vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 dont une base est $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$. On considère l'endomorphisme f de E définit par $f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath}$, $f(\vec{\jmath}) = f(\vec{k}) = \vec{\jmath} + \vec{k}$.

1- a) Ecrire la matrice M de f dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.

b) Montrer que $M^2 = 2M$.

2- f est-il un automorphisme de E ?

3- Déterminer $Kerf$ et Imf ; puis donner si possible une base de chacun de ces ensembles.

4- Montrer que $Kerf$ et Imf sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E.

5- Soit $\vec{u}$ un vecteur de E. Montrer que $\vec{u} \in Imf$ équivaut à $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$.

Exercice 3

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Soit F et G des sous espaces vectoriels de E tels que : $F = \{f \in E;\ \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$ et $G = \{f \in E;\ \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$.

1- Montrer que $F \cap G = \{0\}$.

2- Soit $h \in E$. On pose $f_1(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{2}$ et $g_1(x) = \frac{h(x)-h(-x)}{2}$. tel que $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

a) Montrer que $f_1 \in F$ et $g_1 \in G$.

b) Déterminer les réels α et β tels que $h = \alpha f_1 + \beta g_1$.

3- Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires d E.

Suites Numériques

Exercice 1

On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall\, n \,\epsilon IN\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 2 \end{cases}$

1a) Calculer $U_1; U_2\ et\ U_3$.

b) Démontrer par récurrence que $\forall\, n\, \epsilon IN,\ n \geq 4\ ;\ U_n \geq 0$.

c) Démontrer par récurrence que $\forall\, n\, \epsilon IN,\ n \geq 5\ ;\ U_n \geq n - 3$.

d) La suite est-elle convergente ?

2) On considère la suite (V_n) défie par $\forall\, n\, \epsilon IN,\ V_n = -2U_n + 3n - \frac{21}{2}$.

a- Démontrer que la suite (V_n) est géométrique.

b- En déduire que $\forall\, n\, \epsilon IN,\ U_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

C- Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ en fonction de n.

Exercice 2

1-Etudier les variations de chacune des fonctions u,v et w ci-dessous et en déduire que chacune d'elle est positive ou nulle sur $[0\,; +\infty[$.

$$\boldsymbol{U(x) = x - \sin x\ , V(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x\quad , W(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x.}$$

2-On considère les deux suites de nombres réels $(U_n)\ et\ (V_n)$ pour tout n appartenant a IN par : $U_n = sin\frac{1}{n^2} + sin\ \frac{2}{n^2} + \cdots \dots\dots\dots\dots\dots\dots . + sin\frac{n}{n^2}$.et $V_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \frac{n}{n^2}$.

a- Montrer que la suite (V_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

b- Justifier que pour tout entier naturel $n \geq 1, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots \dots\dots\dots\dots . + n^3 \leq n^4$.

c-Déduire de u l'inégalité $\forall\, n\, \epsilon IN^*\ V_n - \frac{1}{6n^2} \leq U_n \leq V_n$.

d-Démontrer que (U_n) est convergente et préciser sa limite.

Géométrie dans l'espace

Exercice 1

On considère l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct $(o;\ \vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$Soient les points A (3;−2;2); B (6;1;5); C(6;−2;−1) et D(0;4;−1)

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A

b) Ecrire une équation cartésienne du plan (P1) orthogonal à la droite (AC), passant par A.

c) Vérifier que le plan (P2) d'équation $x + y + z - 3 = 0$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par A.

4. Ecrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et de rayon $r = 5\sqrt{3}$.

5. a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ et. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC)

b) Calculer le volume v du tétraèdre ABCD

Exercice 2

Dans l'espace orienté, muni d'un repère orthonormé direct$(o;\ \vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$,

On donne: A(10;5;−10); B(−1;−15;17) ; C(2;20;21) et D(−10;5;5).

1. Justifier que ABC définit un plan, et donner l'équation de (ABC).

2. Calculer les coordonnées du point G isobarycentre des points A , B ,C et montrer que G est le projété orthogonal de D sur (ABC).

3.a) Déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace tel que: $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{MB}$=0. Donner une équation cartésienne de (E).

b) Déterminer l'ensemble(F) des points M de l'espace tels que: $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})\wedge\overrightarrow{MD}=\vec{0}$ Donner une représentation paramétrique de (F) .

4.a) Détermine le milieu L du segment [GB] et calculer la distance de L à (F).En déduire la position relative de (E) et (F).

5. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\|$ =12