SIUTE définie par une FONCTION – RECURRENCE

QUELQUES RAPPELS

- Toute suite **croissante** et **majorée** est convergente
- Toute suite **décroissante** et **minorée** est convergente
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ Si $-1 < a < 1$

EXERCICE

1) Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 0,75pt
2) En utilisant la question précédente, calculer la somme S = $9^2+10^2+11^2+. \quad +18^2$. 0,75pt
3) Soit h la fonction définie sur I = [1; 2] par h(x) = $\frac{3x+2}{x+2}$
   a) Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle de J à préciser. 0,5pt
   b) Montrer que $\forall x \in I\ |h'(x)| \leq \frac{4}{9}$. 0,5pt
4) Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{U_n+2}; \forall n \in IN \end{cases}$
   a) Montrer que $\forall n \in IN$, $1 \leq U_n \leq 2$. 0,5pt
   b) Montrer que $\forall n \in IN$, $U_n \leq U_{nt1}$ 0,5pt

c) Quelle conjecture pouvez-vous, faire sur la convergence de la suite (U_n) ?
d) Démontrer que $\forall n \in IN$, $|U_{nt1} - 2| \leq \frac{4}{9}|U_n - 2|$. 0,5pt
e) En déduire que $|U_n - 2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$ 0,5pt
f) Déterminer la limite de la suite (U_n). 0,25pt

SOLUTION

1) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Soit $P(n)$: « $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ »

- **Au rang 1**

$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$; $\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ donc $\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$ ainsi **P (1) vraie**

- **Hérédité**

Supposons p(n) vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons que P(n+1) l'est aussi, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

En effet, $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)}{6}\right] = \left(\frac{n+1}{6}\right)(2n^2+7n+6)$. $\Delta = 7^2 - 4(2)(6) = 1$
$n_1 = \frac{-7-1}{2(2)} = -2$; $n_2 = \frac{-7+1}{2(2)} = -\frac{3}{2}$ donc

$2n^2 + 7n + 6 = 2(n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right) = (n+2)(2n+3)$ D'où $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$
P (n+1) vraie

- **Conclusion :** $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) Calculons $S = 9^2 + 10^2 + 11^2 + \cdots + 18^2$

Soient $P = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 18^2$ et $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 8^2$ on a $P = Q + S \rightarrow$

$\boldsymbol{S = P - Q}$ or $P = \sum_{k=1}^{18} k^2 = \frac{18(18+1)(2\times 18+1)}{6} = \mathbf{2109}$; $Q = \sum_{k=1}^{8} k^2 = \frac{8(8+1)(2\times 8+1)}{6} = \mathbf{204}$

Donc $\boldsymbol{S} = 2109 - 204 = \mathbf{1905}$.

3a) Montrons que h réalise une bijection de I vers J à déterminer

h est **continue** et dérivable sur I comme fonction rationnelle et on a : $h'(x) = \frac{3(x+2)-(3x+2)}{(x+2)^2} = \frac{3x+6-3x-2}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$ donc h est **strictement croissante** sur I, d'après le **théorème de la bijection**, h réalise une bijection de I vers $h(I) = h([1\,;2]) = [h(1)\,;h(2)] = \left[\frac{5}{3}\,;\mathbf{2}\right]$.

3b) Montrons que $\forall x \in I, |h'(x)| \leq \frac{4}{9}$

On a $h'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$; $x \in I \leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \rightarrow 3 \leq x+2 \leq 4 \rightarrow 9 \leq (x+2)^2 \leq 16 \rightarrow$

$\frac{1}{16} \leq \frac{1}{(x+2)^2} \leq \frac{1}{9} \rightarrow \frac{4}{16} \leq \frac{4}{(x+2)^2} \leq \frac{4}{9} \rightarrow -\frac{4}{9} \leq \frac{1}{4} \leq h'(x) \leq \frac{4}{9} \leftrightarrow |h'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

4a) Démontrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n \leq 2$

Procédons par récurrence. Soit $Q(n)$: ≪ $\forall\, n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n \leq 2$ ≫

- **Au rang 0**

$U_0 = 1$; $1 \leq 1 \leq 2 \leftrightarrow 1 \leq U_0 \leq 2$ donc **Q (0) vraie**

- **Hérédité**

Supposons Q(n) pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons que Q(n+1) l'est aussi, c'est-à-dire $1 \leq U_{n+1} \leq 2$.

Par Hypothèse de récurrence ; $1 \leq U_n \leq 2$ or h est strictement croissante donc

$h(1) \leq h(U_n) \leq h(2) \leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{3U_n+2}{U_n+2} \leq 2 \leftrightarrow 1 \leq \frac{3}{2} \leq U_{n+1} \leq 2 \rightarrow 1 \leq U_{n+1} \leq 2$ Donc Q(n+1) vraie.

- **Conclusion** : $\forall\, n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n \leq 2$

4b) Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \leq U_{n+1}$

Procédons par récurrence. Soit $T(n)$: ≪ $\forall\, n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n \leq 2$ ≫

- **Au rang 0**

$U_0 = 1$; $U_{0+1} = \frac{3U_0+2}{U_0+2} = \frac{5}{3}$; on a $1 \leq \frac{5}{3} \leftrightarrow U_0 \leq U_1$ donc **T (0) vraie**

- **Hérédité**

Supposons T(n) pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons que T(n+1) l'est aussi, c'est-à-dire $U_{n+1} \leq U_{n+2}$.

Par Hypothèse de récurrence ; $U_n \leq U_{n+1}$ h étant croissante, on a : $h(U_n) \leq h(U_{n+1})$ or $h(U_n) = U_{n+1}$ et $h(U_{n+1}) = U_{n+2}$donc $U_{n+1} \leq U_{n+2}$ Ainsi, **Q(n+1) vraie**.

- **Conclusion** : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \leq U_{n+1}$

4c) Conjecture sur la convergence de la suite (U_n)

D'après la question 4b, $U_n \leq U_{n+1}$ donc $(\boldsymbol{U_n})$ **est croissante**

D'après la question 4a, $1 \leq U_n \leq 2$ donc $(\boldsymbol{U_n})$ **est majorée** par 2.

Ainsi (U_n) **est convergente.**

4d) Démontrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - 2| \leq \frac{4}{9}|U_n - 2|$

D'après la question 3, h est continue, dérivable sur I et on a $|h'(x)| \leq \frac{4}{9}$, d'après la question 4a, , $1 \leq U_n \leq 2 \leftrightarrow U_n \in I$. En appliquant l'inégalité des accroissement finis sur $[U_n\ ; 2]$ on a :
$|h(2) - h(U_n)| \leq \frac{4}{9}|2 - U_n| \leftrightarrow |2 - U_{n+1}| \leq \frac{4}{9}|2 - U_n| \leftrightarrow \boldsymbol{|U_{n+1} - 2| \leq \frac{4}{9}|U_n - 2|}$.

4e) Déduisons que $|U_n - 2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

De ce qui précède, $|U_{n+1} - 2| \leq \frac{4}{9}|U_n - 2|$ On a :

$|U_n - 2| \leq \frac{4}{9}\cancel{|U_{n-1} - 2|}$

$\cancel{|U_{n-1} - 2|} \leq \frac{4}{9}\cancel{|U_{n-2} - 2|}$

$\cancel{|U_{n-2} - 2|} \leq \frac{4}{9}\cancel{|U_{n-3} - 2|}$

:::::

$\cancel{|U_2 - 2|} \leq \frac{4}{9}\cancel{|U_1 - 2|}$

$\cancel{|U_1 - 2|} \leq \frac{4}{9}|U_0 - 2|$

$|U_n - 2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |U_0 - 2| \to |U_n - 2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |1 - 2| \leftrightarrow |U_n - 2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

4f) Limite de la suite (U_n)

De ce qui précède, $|U_n - 2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{4}{9} < 1$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2}$